תרגיל 2, מבוא לפונקציות מרוכבות

1. נניח כי פולינום $p(z)=\sum_{i=0}^{n} p_i z^i$ חסום ע"י 1 בעיגול היחידה. הראה כי $|p_i|\le 1$.
רמז: תשתמש ב-
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{it})|dt \le 1.$$
מתי שויון מתקיים?

2. נניח כי $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ונניח כי $z_n=\rho_n e^{i\theta_n}$ סידרה של מספרים קומפלקסיים שונים מאפס המקיימים
$$-\alpha \le \theta_n \le \alpha$$
הראה כי הטורים $\sum z_n, \sum |z_n|$ מתכנסים או מתבדרים יחד.

3. לאילו θ הטור הבא מתכנס? השתמש במשפט אבל.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$$

4. הוכח כי עבור $0<r<1, \theta\in\mathbb{R}$:
$$C(r,\theta)=\sum_{i=0}^{\infty} r^n\cos(n\theta)=\frac{1-r\cos\theta}{1+r^2-2r\cos\theta},$$
$$S(r,\theta)=\sum_{i=0}^{\infty} r^n\sin(n\theta)=\frac{r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}.$$
רמז: פשט את $C(r,\theta)+iS(r,\theta)$.

5. מצא רדיוס התכנסות של $\sum\frac{n^2}{3^n}z^n$ ושל $\sum\frac{(-1)^n}{(n!)^2}z^n$.

6. בטא את $\sin(3\phi),\cos(5\phi)$ באמצעות $\sin\phi,\cos\phi$.

7. מצא חלק ממשי ומדומה של z^z במושגים של x,y ($z=x+iy$).

8. חשב $\sin i,\cos i,\tan(1+i)$. תשתמש בהגדרה $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$.

9. הוכח $|\cos(z)|^2=\sinh^2 y+\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cosh 2y+\cos 2x)$.